The energy density of a shock wave

1974 J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 7 1887

(http://iopscience.iop.org/0301-0015/7/15/013)

J. Phys. A: Math., Nucl. Gen., Vol. 7, No. 15, 1974. Printed in Great Britain. © 1974

La densité d'énergie d'une onde de choc

A Legros et J Madore

Laboratoire de Physique Théorique, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05, France

Reçu 2 Avril 1974

Résumé. Nous proposons une expression de la densité de l'énergie de l'onde de choc gravitationnelle de premier ordre.

Abstract. An expression is proposed for the energy–momentum density of a first-order gravitational shock wave.

Nous calculons ici l'absorption d'une onde de choc gravitationnelle par un fluide visqueux. Nous trouverons que l'onde est absorbée dans un temps caractéristique η^{-1} où η est le coefficient de viscosité. C'est à dire, nous obtenons le même résultat qu'avec l'approximation WKB (Madore 1973).

Nous calculons ensuite la production d'entropie dûe au passage de l'onde, dans le cas particulier d'un espace–temps stationnaire avant le choc. En utilisant la relation thermodynamique $dQ = T\,dS$, nous pouvons trouver une expression de la densité de l'énergie de l'onde de choc.

Nous nous plaçons dans l'espace V_4 de la relativité générale, muni de la métrique $g_{\mu\nu}$ de signature $(+\ldots)$.

Le tenseur impulsion–énergie d'un fluide visqueux (Landau et Lifshitz 1959, Weinberg 1971, Ehlers 1971, Eckart 1940) s'écrit:

$$T_{\mu\nu} = wu_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} + \eta\sigma_{\mu\nu},$$

avec w l'enthalpie, p la pression et η le coefficient de viscosité.

$$\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu$$

est le tenseur projection sur la 3 surface normale à la quadrivitesse. $\sigma_{\mu\nu}$ le tenseur de cisaillement est défini par

$$\sigma_{\mu\nu} = \pi^\alpha_\mu \pi^\beta_\nu u_{(\alpha;\beta)} - \tfrac{2}{3}\theta\pi_{\mu\nu}; \qquad \theta = u^\alpha_{;\alpha}.$$

Les résultats obtenus sont indépendants des coefficients de viscosité ζ et de conductivité thermal κ. Nous les supposerons nuls. Cette hypothèse ne restreint en rien le problème mais simplifie les calculs.

Le vecteur flot d'entropie est donné par

$$S^\alpha = n\sigma u^\alpha.$$

n représente le nombre de particules par unité de volume et σ l'entropie par particule.

Des équations de continuité $u_\alpha T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ et de l'équation de conservation du nombre de particules $\nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0$, nous déduisons (voir par exemple Weinberg 1971)

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \frac{\eta}{2T}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}.$$

Le coefficient de viscosité η vérifie : $0 \leqslant \eta \ll Lw$, où L représente la longueur caractéristique de variation du tenseur $g_{\mu\nu}$. Nous négligerons les termes de l'ordre de $(\eta/wL)^2$.

Une onde de choc gravitationnelle est une discontinuité de la dérivée du tenseur métrique $\partial_\mu g_{\alpha\beta}$ à travers une hypersurface Σ. Soit $\xi_\mu = \partial_\mu \Sigma$ la normale à cette hypersurface.

Nous supposerons que u^α et $g^{\alpha\beta}$ sont continus. Les dérivées premières et secondes du tenseur métrique sont discontinues. On démontre (Papapetrou et Treder 1962, Lichnerowicz 1967) qu'elles sont de la forme

$$[\partial_\mu g_{\alpha\beta}] = \xi_\mu \gamma_{\alpha\beta}, \tag{1a}$$

$$[\partial_\alpha \partial_\mu g_{\lambda\rho}] = \xi_\alpha \xi_\mu h_{\lambda\rho} + \xi_{(\alpha}\nabla_{\mu)}\gamma_{\lambda\rho} + \nabla_\alpha \xi_\mu \gamma_{\lambda\rho}. \tag{1b}$$

avec $\gamma_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$ les tenseurs de discontinuité de premier et de deuxième ordre, définis sur Σ. Nous supposons que $\gamma_{\mu\nu}$ sont petites et nous negligeons les termes quadratiques en $\gamma_{\mu\nu}$. Toutes les autres discontinuités se calculent à partir de (1).

Nous partons des équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

et des équations de conservation

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \qquad \nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0. \tag{3}$$

Ces équations sont valables de chaque côté du choc. Donc

$$[G_{\mu\nu}] = -[T_{\mu\nu}], \tag{4}$$

$$[\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}] = 0, \qquad [\nabla_\alpha(nu^\alpha)] = 0. \tag{5}$$

(4) et (5) constituent le système fondamental d'équations des chocs (Lichnerowicz 1967). Deux sortes d'ondes vérifient ce système : les ondes sonores et les ondes gravitationnelles. Ce sont ces dernières qui nous intéressent ici.

$T_{\alpha\beta}$ est discontinu, donc sa dérivée doit être prise au sens des distributions (Lichnerowicz 1967)

$$\nabla^D_\alpha T^{\alpha\beta} = \delta_\Sigma \xi_\alpha [T^{\alpha\beta}] + \nabla_\alpha T^{\alpha\beta}.$$

Le terme de droite doit être nul. Donc

$$\xi_\alpha [T^{\alpha\beta}] = 0. \tag{6}$$

Dans le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$, il apparait des dérivées secondes de la métrique. L'équation (4) doit aussi être prise au sens des distributions. Posons

$$\psi_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma g_{\mu\nu},$$

avec $\gamma = \gamma^\mu_\mu$. Donc

$$\xi_\rho \xi_{(\mu}\psi^\rho_{\nu)} - \xi^2(\psi_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\psi g_{\mu\nu}) = 0. \tag{7}$$

Supposons

$$\xi^2 = 0. \tag{8}$$

En effet quand $\xi^2 \neq 0$, en se plaçant dans un système de coordonnée convenable, la discontinuité $\psi_{\mu\nu}$ s'annule. Par example, en coordonnées harmoniques:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0. \tag{9}$$

La discontinuité de (9) montre que $\xi^{\mu}\psi_{\mu\nu} = 0$. De (7) on déduit donc que $\psi_{\mu\nu} = 0$. Il n'y a plus d'onde gravitationnelle. Nous avons peut être dans ce cas des ondes sonores provenant de la discontinuité des autres quantités.

De (7) et (8) on déduit

$$\psi_{\rho\sigma}\xi^{\sigma} = 0. \tag{10}$$

Pour calculer l'absorption de l'onde par le fluide, nous résolvons les équations (4) et (5).

Calculons d'abord $[T_{\mu\nu}]$ avec l'aide de (6) et de l'équation (5) dans le cas adiabatique, en utilisant (8) et (10) nous obtenons:

$$[T_{\mu\nu}] = \eta\left(\xi_{\mu}\xi_{\nu}\frac{\gamma_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}}{u\,.\,\xi} - \gamma_{\rho(\mu}u^{\rho}\xi_{\nu)} + u\,.\,\xi\gamma_{\mu\nu}\right). \tag{11}$$

Nous pouvons fixer le choix de la jauge en posant $\psi_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$.

La discontinuité du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ est donnée par

$$[G_{\mu\nu}] = -\tfrac{1}{2}\xi_{(\mu}\xi^{\sigma}H_{\nu)\sigma} + \xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\gamma_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\nabla_{\alpha}\xi^{\alpha}\gamma_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Nous avons ici négligé des termes quadratiques en $\gamma_{\mu\nu}$ et nous avons posé

$$H_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}hg_{\alpha\beta}, \qquad h = h^{\alpha}_{\alpha}.$$

$h_{\alpha\beta}$ est le tenseur de discontinuité du deuxième ordre de $g_{\alpha\beta}$ défini par (1*b*).

Nous pouvons considérer que $H_{\alpha\beta}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ sont indépendants. Donc nous obtenons de (12)

$$H_{\alpha\beta}\xi^{\beta} = 0$$

et l'équation ($\nabla/\mathrm{d}r \equiv \xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}$)

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}r}\gamma_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\nabla_{\alpha}\xi^{\alpha}\gamma_{\mu\nu} = -\eta\left(\xi_{\mu}\xi_{\nu}\frac{\gamma_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}}{u\,.\,\xi} - \gamma^{\rho}_{(\mu}u_{\rho}\xi_{\nu)} + u\,.\,\xi\gamma_{\mu\nu}\right). \tag{13a}$$

pour $\gamma_{\alpha\beta}$.

Posons $\gamma_{\mu\nu} = An_{\mu\nu}$ avec $n_{\mu\nu}n^{\mu\nu} = 1$. A l'aide des équations (12), (11) et (4), nous obtenons une équation d'absorption (Madore 1973)

$$\nabla_{\lambda}(A^2\xi^{\lambda}) = -2\eta u\,.\,\xi A^2, \tag{13b}$$

et une loi de transport pour $n_{\mu\nu}$

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}r}n_{\mu\nu} = \eta\xi_{(\nu}\left(-\frac{1}{2}\xi_{\mu)}\frac{n_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}}{u\,.\,\xi} + n^{\sigma}_{\mu)}u_{\sigma}\right)$$

Posons $A = e^{-c}b$ avec $\nabla_\lambda(b^2\xi^\lambda) = 0$, l'equation (13) s'écrit

$$\frac{dc}{dr} = \eta u \,.\, \xi.$$

On voit donc que l'onde est absorbée dans un temps caractéristique η^{-1}.

Calculons maintenant la production d'entropie dûe au passage de l'onde de choc. Des raisons techniques nous ont obligés à nous placer dans un cas particulier. Nous ferons l'hypothèse que, avant le choc, l'espace–temps est stationnaire de vecteur de Killing u_α: $u_{(\alpha;\beta)} = 0$. Donc

$$[\nabla_\alpha S^\alpha] = \frac{\eta}{2T}(u \,.\, \xi)^2 A^2. \tag{14}$$

Dans un repère du fluide: $S^\alpha = (S^0, 0, 0, 0)$. Nous pouvons dans ce repère identifier le flux d'entropie S^0 à l'entropie classique S et utiliser la relation thermodynamique classique

$$dQ = T dS \tag{15}$$

pour un système fermé.

L'onde est absorbée par (13) et l'entropie croit par (14). Ceci doit correspondre à une perte d'énergie de l'onde au profit du fluide. Nous connaissons mal cette énergie et le 'tenseur' impulsion–énergie de rayonnement de l'onde. Mais nous savons qu'ils doivent être nuls avant le choc et dépendre du point considéré après le choc. Nous connaissons d'après (14) et (15) la discontinuité de l'énergie à travers le choc (c'est à dire sa valeur dans un repère propre après le choc)

$$\left[\frac{dQ}{dt}\right] = -\left[\frac{d}{dt}t^{00}\right] = \tfrac{1}{2}\eta A^2(u \,.\, \xi)^2.$$

Donc en comparant avec (13*b*) nous pouvons proposer l'expression suivante pour la densité d'énergie du choc:

$$[t^{\alpha\beta}] = \tfrac{1}{4}A^2\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Nous sommes encouragés dans ce choix par les formules semblables du cas asymptotique et du cas WKB (Isaacson 1968, Choquet 1964, 1969).

Références

Choquet Y 1964 *C. R. Acad. Sci. Paris* **258** 1089
1969 *Commun. Math. Phys.* **12** 16
Eckart C 1940 *Phys. Rev.* **58** 919
Ehlers J 1971 *General Relativity and Cosmology* ed R K Sachs (New York: Academic Press)
Isaacson R A 1968 *Phys. Rev.* **166** 1263, 1272
Landau L et Lifshitz E 1959 *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press)
Lichnerowicz A 1967 *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics* (New York: Benjamin)
Madore J 1973 *Commun. Math. Phys.* **30** 335
Papapetrou A et Treder H 1962 *Recent Developments in General Relativity* (Oxford: Pergamon Press)
Weinberg S 1971 *Astrophys. J.* **168** 175